[p. 181-196][*Ciência e Sociedade* - 1948]

MARX E A MATEMÁTICA[1]

Dirk J. Struik

Marx recebeu seus primeiros ensinamentos em matemática na escola secundária de Trier [*Gymnasium of Trier*], na cidade de Treves, na Renânia, onde nasceu. Na graduação, em 1835, seu conhecimento em matemática era considerado adequado. Isso significa que ele começou a carreira com algum conhecimento de aritmética elementar, álgebra para equações quadráticas e geometria plana e sólida. Também possivelmente de trigonometria e um pouco de álgebra superior, geometria analítica e cálculo.

Não há indícios de que ele mostrou qualquer interesse pela matemática durante os turbulentos anos pré e pós 1848, em que ele e Engels desenvolveram seus pontos de vista do mundo. O primeiro sinal de que Marx havia retornado a seus estudos de matemática é do período em que ele se exilou em Londres e estava trabalhando nos seus grandes projetos científicos. Em uma carta enviada a Engels, em 11 de Janeiro de 1858[2], ele escreveu:

> Na elaboração dos princípios econômicos, fiquei tão abominavelmente retido por erros de cálculo, que, desesperado, comecei de novo a percorrer a álgebra. Aritmética sempre me foi estranha. Pelo desvio da álgebra, no entanto, pego rapidamente.

Seu estudo de álgebra foi seguido pelo de geometria analítica e cálculo. Em carta a Engels, de 06 de Julho de 1863, ele relatou o progresso:

> Nos tempos livres, dedico-me ao cálculo diferencial e integral. A propósito! Possuo uma superabundância de publicações sobre este assunto e queria enviar-lhe uma se quiser empreender um estudo desta disciplina. Acho-o quase necessário para os seus estudos militares. Além disso, constitui uma parte muito mais fácil (quanto aos aspectos puramente técnicos) da matemática do que, por exemplo, a álgebra superior. Além do conhecimento comum de álgebra e trigonometria, não é preciso nenhum estudo preparatório, exceto o conhecimento geral das seções cônicas[3].

Portanto, parece que Marx achou a álgebra mais fácil que a aritmética e o cálculo mais fácil do que a álgebra. Mas ele não estava tão interessado na técnica do cálculo. Ele foi irresistivelmente atraído para as antigas [182]questões da fundamentação do cálculo, ainda mais porque, nos livros em que ele procurou, este assunto era tratado de modo insatisfatório e, eventualmente, controverso. Marx, assim como muitos pensadores dialéticos antes e depois dele, encontrou infindável fascinação nas diferentes definições da derivada e do diferencial, como é mostrado por uma grande quantidade de material manuscrito que foi encontrado entre seus trabalhos.

Nos anos seguintes a 1870, Marx até tentou desenvolver seus próprios pontos de vista. Engels relata tal fase no prefácio ao segundo volume d'O Capital:

---

[1] Artigo "Marx and Mathematics", de Dirk J. Struik, publicado em 1948 na revista "Science & Society", traduzido por Leonardo Trindade.

[2] *Marx-Engels Gesamtausgabe* (Berlim, 1930), Abt. III, Bd. II, p. 273.

[3] *Ibid*, III, p. 149.

> Após 1879, uma intermissão voltou a ocorrer, principalmente devido à doença. O conteúdo de muitos cadernos de anotação com resumos desse período consiste em agronomia, relações agrárias americanas e, especialmente, russas, dinheiro, mercado e sistemas bancários, e por fim ciências naturais, geologia e fisiologia, e especialmente escritos matemáticos independentes.[4]

Marx, nos últimos dias de sua vida, juntou algumas de suas reflexões concernentes ao cálculo diferencial de uma forma legível e despachou os manuscritos a Engels. Uma carta de 18 de Agosto de 1881 mostra que Engels estudou os manuscritos:

> Ontem ao menos tomei coragem de estudar seus manuscritos matemáticos mesmo sem amparo dos livros, e fiquei feliz em ver que não precisei deles. Devo congratulá-lo pelo trabalho. A questão é tão perfeitamente clara (*sonnenklar*) que não podemos nos surpreender o bastante com como os matemáticos insistem em mistificá-la.[5]

Engels continua a apresentar o ponto de vista de Marx em suas próprias palavras e compara-o com os pontos de vista de Hegel, com os quais ele e Marx eram completamente familiarizados. Ele termina com as seguintes palavras:

> O assunto tem tomado conta de mim de tal maneira que não apenas revira na minha cabeça o dia todo, mas também semana passada, em um sonho, dei a um companheiro os botões de minha camisa para diferenciar e este camarada fugiu com eles [*und dieser mit damit durchbrannte*].[6]

Marx, que na época estava preocupado com a doença de sua esposa – ela morreu em Dezembro do mesmo ano –, ao que parece, não retornou ao assunto em sua correspondência subsequente. Quando, entretanto, Engels relatou a Marx (21 de Novembro de 1882) sobre uma troca de cartas entre ele e seu amigo Sam Moore sobre a questão das teorias matemáticas de Marx, [183]este prontamente fez uma resposta no dia seguinte. Voltamos a essa correspondência mais tarde neste artigo.

Marx morreu antes que pudesse acrescentar mais alguma coisa às suas ideias. Engels mais tarde pensou em publicar os manuscritos matemáticos de Marx junto com os seus, a dialética da natureza. No prefácio à segunda edição de *Anti-Düring* (1885) Engels menciona seus próprios estudos em matemática e ciências naturais, e acrescenta que tinha interrompido após a morte de Marx. Ele conclui: "talvez mais tarde haja uma oportunidade de coletar e publicar os resultados obtidos, conjuntamente com os importantíssimos manuscritos matemáticos deixados por Marx"[7].

Engels não encontrou tempo para realizar este trabalho, e os papéis de Marx e Engels lidando com as ciências exatas permaneceram nos arquivos. Os social-democratas alemães, que herdaram os documentos de Marx e Engels, foram incapazes de apreciar a dialética da matemática, física e química. O entendimento teve de esperar até que os russos começassem a mostrar a fundamental importância do trabalho filosófico de Marx e Engels. A obra *Materialismo e Empiriocriticismo* (1908), de Lenin, foi uma precursora [*trail blazer*], mas não veio a ser conhecida fora dos estritos círculos russos até sua publicação em alemão, muito tempo depois da revolução de 1917.

---

[4] *Capital* (Chicago, 1919), II, p. 10.
[5] *Marx-Engels Gesamtausgabe*, Abt. III, Bd. IV, . p. 513.
[6] *Ibid.*, p. 514.
[7] *Anti-Dühring* (New York, 1939), p. 17.

Posteriormente os russos publicaram *Dialética da Natureza*, de Engels; primeiro em russo, e então (1927) no alemão original.

Os livros de Lenin e Engels agora estão disponíveis em inglês; o de Lenin em uma tradução de 1927, e o de Engels em uma tradução de 1940.

Mais tarde, alguns dos manuscritos matemáticos mais característicos de Marx foram publicados, porém apenas na tradução russa[8]. Nosso estudo é baseado nos documentos publicados pelos russos. Espera-se que todos seus escritos matemáticos sejam eventualmente publicados, não apenas em russo, mas também no alemão original.

[184]A extensão do interesse de Marx na matemática é verificada pelo fato de que o instituto Marx-Engels-Lenin em Moscou obteve, desde 1925, cópias fotográficas de cerca de 900 páginas de manuscritos matemáticos de Marx, todos os quais foram decifrados e colocados em ordem[9]. Os manuscritos consistem essencialmente em resumos de livros, estudados por Marx, frequentemente com notas; de relatos abrangentes sobre assuntos especiais, e de investigações independentes, expressando diferentes estágios dos estudos de Marx, desde rascunhos preliminares até manuscritos finalizados, provavelmente para auxiliar Engels. Apenas algumas poucas páginas, quase vinte e quatro, são dedicadas a cálculos.

De longe, a parte mais volumosa desses manuscritos trata da álgebra, que Marx estudou de Lacroix, Maclaurin e talvez de outros textos. A maior parte desta álgebra abrange a resolução de equações de grau superior, mas Marx também mostrou interesse em séries, notadamente em séries divergentes. Também há resumos que tratam de geometria analítica, especialmente do livro de Hymers.

Outros manuscritos contêm reflexões de Marx acerca do cálculo diferencial. Há novamente muitos resumos e relatos abrangentes baseados em livros de Lacroix, Boucharlat e Hind, complementados pelos de Hall e Hemming, todos textos acadêmicos populares das primeiras décadas do século XIX. Estes trabalhos tratam principalmente da concepção de função e séries, de limite e de derivada, e as determinações de máximo e mínimo. Marx mostrou interesse particularmente no famoso uso que Lagrange faz da série de Taylor para a fundamentação "algébrica" do cálculo, e comparou as diferentes definições de derivada e de diferencial em diversos textos. Marx, em uma de suas anotações, reproduz a derivação do teorema binomial do teorema de Taylor, e observa que "Lagrange, ao contrário, deriva o teorema de Taylor do teorema binomial", um fato que se repete com frequência e ao qual ele dedica algum pensamento. Um de seus manuscritos é intitulado "Um desenvolvimento modificado do teorema de Taylor baseado puramente na álgebra segundo Lagrange"[10], outros têm um título tão significativo quanto: "Teorema de Taylor – é baseado na tradução da linguagem algébrica do teorema binomial para expressões de diferencial", e "Teorema de Maclaurin também é apenas tradução da linguagem algébrica do teorema binomial na linguagem diferencial". Dois cadernos, [185]provavelmente

---

[8] *Marksizm i Estestvoznanie* (Moscou, 1933). A tradução russa dos manuscritos ocupa as p. 5-61; seguida pelos artigos de E. Kolman, S. Yanovskaya, D. J. Struik, H. J. Muller e outros. O original em alemão, até onde sei, não foi publicado, embora pareça haver planos para isso; veja-se *Unter dem Banner des Marxismus* (1935), no. 9, p. 104, n. 1. Recebi em 1935 uma cópia datilografada do original em alemão dos manuscritos matemáticos publicados pelo Instituto Marx-Engels em Moscou, e as citações no presente artigo foram traduzidas deste texto.

[9] As informações relativas ao caráter geral das 900 páginas dos manuscritos matemáticos de Marx são extraídas de S. Yanovskaya, "O Matematicheskich Rukopisiakh K. Marksa", p. 136-180. Veja-se também E. Kolman, *Science at the Cross Roads* (Londres, 1931), p. 233-235.

[10] "Nach Lagrange somewhat modified Entwicklung des Taylorschen Theorems auf bloss algebräischer Grundlage".

datados de um período avançado da vida de Marx, contêm exemplos do método de diferenciação que Marx eventualmente preferia, assim como documentos sobre diferencial e um esboço histórico dos métodos de diferenciação usados por Newton, Leibniz, D'Alambert e Lagrange. Ele não estava tão interessado assim na técnica de diferenciação e integração quanto estava em relação aos princípios básicos sobre os quais o cálculo é construído, isto é, na forma como as noções de derivada e diferencial são introduzidas. Ele logo descobriu que havia uma considerável diferença de opiniões entre os principais autores sobre esses princípios básicos, uma diferença geralmente acompanhada de confusão. Essa confusão só aumentou nos manuais escritos por autores secundários[11]. Diferentes respostas foram dadas acerca de muitas questões, como se a derivada é baseada no diferencial ou vice-versa, se o diferencial é pequeno e constante, pequeno e tendendo a zero, ou absolutamente zero etc. Marx sentiu o desafio oferecido pelo problema que atraiu algumas das mais aguçadas mentes do passado e que lidaram com o coração do processo dialético, ou seja, a natureza da mudança. Não encontrando nenhuma resposta satisfatória nos livros, ele tentou chegar a uma resposta ele mesmo à sua própria maneira: indo às fontes, comparando os resultados e forjando-os em novas regiões. Pode talvez parecer ao leitor que entre as fontes estudadas por Marx parece não haver referência a Augustin Cauchy – ao menos até onde podemos julgar pelo material publicado. O trabalho de Cauchy, o qual sustenta a exposição da fundamentação do cálculo nos livros atuais, poderia estar disponível a Marx[12]. A razão pela qual Marx não tomou conhecimento de Cauchy pode ser o fato de que as ideias de Cauchy apenas lentamente penetraram os livros didáticos, de modo que pode ter escapado de Marx, que [186]não se movia entre os matemáticos profissionais[13]. Uma razão mais plausível é que o método de Cauchy definir a derivada era essencialmente o de D'Alambert, então Marx não o considerou como um novo método.

Quaisquer que fossem as razões de Marx para ignorar o trabalho de Cauchy, seu sentimento de insatisfação com o jeito como se introduzia o cálculo era compartilhado por alguns dos principais jovens matemáticos profissionais de sua época. No mesmo ano (1858) em que Marx retomou seus estudos de matemática, Richard Dedekind, em Zurique, sentiu semelhante insatisfação, no caso dele ao ensinar o cálculo. Escrevendo em 1872, ele primeiro declarou que em suas aulas ele recorreu a evidências geométricas para explicar a noção de um limite; então continuou:

> Mas que essa forma de introdução ao cálculo diferencial não pode ser considerada científica, isso ninguém negará. Para mim, este sentimento de insatisfação era tão avassalador que tomei a firme decisão de continuar meditando sobre a questão até encontrar uma base puramente algébrica e perfeitamente rigorosa para os princípios do cálculo infinitesimal. [14]

Isso levou Dedekind a uma nova abordagem axiomática da concepção do contínuo [*continuum*] e dos números irracionais, que foi um dos grandes esforços pioneiros no que chamamos de

---

[11] Um bom levantamento das várias teorias é dado por F. Cajori, "Grafting of the Theory of Limits on the Calculus of Leibniz", Am. Math. Monthly, xxx (1923), p. 223-34.

[12] A. Cauchy, *Résumeé des leçons données a l'Ecole Royale Polytechnique sur le calcul infinitesimal* (Paris, 1823).

[13] O prefácio da sexta edição do livro de Boucharlat (1856), que Marx consultou, embora mencionasse em detalhes o trabalho de Newton, Leibniz, D'Alambert e Lagrange, silencia sobre Cauchy. Um dos primeiros livros didáticos amplamente utilizados que explicitamente usou os métodos de Cauchy foi C. Jordan, *Cours d'Analyse*, que apareceu em 1882.

[14] R. Dedekind, *Stetigheit und Irrationalzahlen* (1872). Traduzido em "Essays on the Theory of Numbers" (Chicago, 1901), p. 1 f.

aritmetização da matemática. Alguns anos mais tarde, um dos outros pioneiros dos novos métodos de rigor na matemática, Paul Du Bois Reymond, exclamou:

> O matemático negaria – especialmente em sua forma publicada – que a concepção de limite e seus associados mais próximos, a concepção de ilimitado, o infinitamente grande e o infinitamente pequeno, o irracional etc. ainda carecem de rigor? O professor em mandado e palavra está acostumado a pensar rapidamente através desta questionável porta de análise, a fim de percorrer o mais confortavelmente as bem iluminadas estradas do cálculo. [15]

Não foi antes das últimas décadas do século XIX, sob a influência de Dedekind e Du Bois Reymond, bem como de Weierstrass e Cantor, que a profunda revisão dos princípios do cálculo [187]tomou lugar na base dos métodos modernos, e mostrou que a abordagem de Cauchy pode levar a completo rigor. Esse trabalho apareceu muito tarde para influenciar Marx e Engels[16]. O resultado é que as reflexões de Marx sobre as fundamentações do cálculo devem ser apreciadas como uma crítica aos métodos do século XVIII. Sentimos, no entanto, que seu trabalho, desenvolvido contemporaneamente mas de forma independente dos principais matemáticos da segunda metade do século XIX, ainda hoje contribui para a compreensão do significado do cálculo.

Nunca devemos esquecer, é claro, que Marx nunca publicou seu material, e que sequer há alguma indicação de que ele pretendesse publicar, ainda que Engels pareça ter jogado com a ideia. Marx trabalhou na matemática nas horas de repouso, para relaxar, muitas vezes nos momentos de enfermidade, guiado por alguns livros que ocorreu de ter em sua biblioteca, como os de Boucharlat, que introduziam os princípios de diferenciação de maneira insatisfatória. Ele procurou elucidar as fontes citadas em Boucharlat e livros semelhantes, o que o levou a Newton, Leibniz, D'Alambert e Lagrange. Suas anotações foram em primeiro lugar destinadas a seu próprio esclarecimento, depois de ler esses clássicos em tentativas de entender os textos frequentemente obscuros. Atingido pelas formulações insatisfatórias desses livros, ele tentou de maneira característica endireitar as dificuldades para si mesmo.

As dificuldades que Marx tentou superar são, no presente, tão reais quanto em seu tempo, ainda que nosso aparato formal seja mais cuidadosamente elaborado e praticamente infalível. Essas dificuldades são tão antigas quanto Zeno de Eleia e tão jovens quanto a mais recente tentativa filosófica e fisiológica de tentar entender como o repouso pode passar a movimento, e como movimento pode levar a repouso. Essa é a razão pela qual Marx estudou tão cuidadosamente a concepção de derivada de uma função e a concepção relacionada de diferencial. Ele descobriu que há três métodos principais pelos quais essas concepções foram desenvolvidas. Marx classificou-os, chamando-os de método místico, método racional e método algébrico (ligados aos nomes de Newton-Leibniz, D'Alambert e Lagrange, respectivamente), e então opôs a eles seu próprio modo de entender a derivada, o diferencial e o cálculo em geral. Vamos explicar a dificuldade diferenciando a função $y = x^3$ nas diferentes formas criticadas por Marx.[188]

---

[15] P. Du Bois Reymond, *Die allgemeine Funktionentheorie*, I. (1882), p. 2. O autor era irmão do fisiologista Emil, que sustentava o slogan do agnosticismo: "Ignorabimus".

[16] É até duvidoso que alguma informação pertinente sobre o trabalho dos grandes matemáticos alemães da segunda metade do século XIX tenha chegado a Marx e Engels. A Inglaterra da época era um excelente lugar para estudar capitalismo, física, química e biologia, mas era atrasada em matemática, exceto em alguns ramos especializados de geometria e álgebra.

1) *Newton-Leibniz*. ("*O cálculo diferencial místico*").[17] – x varia para $x + \dot{x}t$ em Newton, e para $x + dx$ em Leibniz; nós seguimos Leibniz. Então y varia para $y_1 = y + dy$ e

$$y_1 = y + dy = (x + dx)^3 = x^3 + 3x^2dx + 3x(dx)^2 + (dx)^3.$$

Se considerado que $(dx)^2$ e $(dx)^3$ são infinitesimais quando comparados a $3x^2dx$, eles podem ser descartados e obtemos a fórmula correta

$$dy = 3x^2dx.$$

Isso é altamente misterioso, e o mistério não desaparece se primeiro dividirmos dy por dx

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 3xdx + (dx)^2$$

e então deixarmos $h = dx$ ser zero. É verdade que obtemos a fórmula certa

$$\frac{0}{0} = \frac{dy}{dx} = 3x^2,$$

mas Marx ressalta:

> a anulação [nullification] de h não é permitida antes que a primeira função derivada, aqui $3x^2$, tenha sido liberada do fator h pela divisão, daí $\frac{y_1 - y}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2$. Só então podemos anular [*annul*] (*aufheben*) a diferença finita. O coeficiente diferencial $\frac{dy}{dx} = 3x^2$ também deve, portanto, ser originalmente desenvolvido antes que possamos obter o diferencial $dy = 3x^2dx$.

Em outras palavras, sabíamos de antemão qual deveria ser a resposta, e desenvolvemos algum raciocínio para torná-la plausível. Foi essa maneira frouxa com que Newton e Leibniz vulgarmente fundamentaram o cálculo que levou o Bispo Berkeley à sua famosa crítica em *O Analítico* de 1734. Aqui ele questionou se os dx são ou não zero, chamou-os "fantasmas de quantidades que se foram" e concluiu que nenhum matemático que acreditasse nesses absurdos poderia contestar sensatamente os dogmas miraculosos da religião. Esse não foi o único caso em que as dificuldades da fundamentação na ciência foram exploradas por razões idealistas e obscurantistas.

Os matemáticos sentiram a dificuldade e tentaram lidar com isso sugerindo formas mais exatas de fundamentar o cálculo[18]. As mais importantes contribuições foram as de D'Alambert e Lagrange.

2) *D'Alambert* ("*O cálculo diferencial racional*").[19] Nas palavras de Marx:

> D'Alambert parte diretamente do ponto de partida de Newton e Leibniz
>
> $$x_1 = x + dx$$
>
> mas imediatamente faz a correção fundamental $x_1 = x + \Delta x$, quer [189]dizer, Δx torna-se um acréscimo indeterminado, mas *prima facie* finito, que se chama h. A transformação

[17] Leibniz publicou sua primeira obra sobre o cálculo em 1684, e Newton em 1693.
[18] Veja-se e.g. F. Cajori, *A History of the Conceptions of Limit and Fluxion in Great Britain from Newton to Woodhouse* (Chicago e London, 1919).
[19] D'Alambert em "Différentiel" na *Encyclopédie* (1754) de Diderot.

> de h ou Δx em dx (ele usou a notação de Leibniz, como todos os franceses) só é encontrada como o último resultado do desenvolvimento ou, pelo menos, pouco antes do fechamento dos portões (*knapp vor Torschluss*), enquanto isso aparece como ponto de partida com os místicos e os iniciadores do cálculo:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{y_1-y}{x_1-x}=\frac{x_1^3-x^3}{h}=\frac{(x+h)^3-x^3}{h}=3x^2+3xh+h^2.$$

Agora, colocando $h=0$, a expressão $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ transforam-se em $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{0}{0}=\frac{dy}{dx}=3x^2=f'(x)$$

A maneira pela qual D'Alambert diferencia é muito similar ao método de Cauchy. Nós escrevemos, atualmente, com Cauchy

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

A objeção de Marx a esse método é que, embora esteja formalmente correto, a derivada $f'(x)$ já está presente em $3x^2+3xh+h^2$, isto é, antes da diferenciação. É simplesmente o primeiro termo de uma soma, $3x^2+3xh+h^2$, e o método de D'Alambert consiste simplesmente em elaborar uma maneira de se livrar do membro (ou membros) da soma que acompanham $3x^2$. Marx chama isso de *Loswicklung* (separação); enquanto o método correto deveria ser *Entwicklung* (desenvolvimento):

> A derivação, portanto, é a mesma que em Leibniz e Newton, mas a vulgar derivada está, de um modo estritamente algébrico, *separada* de seu outro contexto[20]. Não há *desenvolvimento*, mas separação de $f'(x)$, aqui $3x^2$ [21], do seu fator h e os membros que aparecem a seu lado nos outros membros marchando como soldados rasos. O que realmente foi desenvolvido é o lado esquerdo simbólico, isto é, dx, dy e sua razão, o coeficiente diferencial simbólico $\frac{dy}{dx}$ ou $\frac{0}{0}$ (ao contrário do outro jeito $\frac{0}{0}=\frac{dy}{dx}$), que por sua vez novamente provocou alguns calafrios metafísicos, embora o símbolo tenha sido deduzido matematicamente. D'Alambert tinha feito um enorme progresso, ao despir o cálculo diferencial de seu véu místico.

A avaliação de Marx sobre o trabalho de D'Alambert como "um enorme progresso" ainda permanece. Isso é o mais notável, tendo em vista que até os historiadores modernos da matemática têm uma maneira de encobrir isso. Marx em seguida procede a Lagrange.

3) *Lagrange* ("*O cálculo diferencial puramente algébrico*").

$$y=f(x)=x^3$$

$$y_1=(x+h)^3=x^3+3x^2h+3xh^2+h^3$$

[190]Lagrange simplesmente define o coeficiente de h como a derivada:

---

[20] "losgewickelt von ihrem sonstigen Zusammenhang".
[21] "Es ist keine *Entwicklung,* sondern eine *Loswicklung* des $f(x)$".

$\frac{dy}{dx} = f'(x) = 3x^2$, ou mais comumente pelo teorema de Taylor para uma $f(x)$ genérica:

$$y_1 = f(x+h) = y \text{ (ou } f(x)) + \frac{dy}{dx}h + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{2} + \cdots$$

Marx então parafraseia o método de Lagrange nas seguintes palavras:

> No primeiro método (1), assim como no segundo (2), o coeficiente real requerido é fabricado já pronto pelo teorema binomial e pode ser encontrado já como o segundo termo da expansão da série, portanto no termo que necessariamente contém h^1. Todo o procedimento diferencial adicional, seja como em (1) ou como em (2), é portanto ostentação. Vamos, então, largar o lastro útil. Sabemos de uma vez por todas pela expansão binomial que o primeiro coeficiente real é o fator de h, o segundo é o fator de h^2 etc. Esses coeficientes diferenciais reais são nada além de *funções derivadas da função original* em x, expandida binomialmente em sucessão... Todo o verdadeiro problema reduzido à descoberta de métodos (algébricos) de expansão de todo tipo de função de $x + h$ em potências ascendentes inteiras de h, que em muitos casos não pode ser efetuado sem uma grande prolixidade de operações[22]. Até agora, não aparece nada em Lagrange, mas que pode ser encontrado diretamente no método de D'Alambert (pois isso também inclui todo o desenvolvimento do método místico).

A objeção que Marx levantou contra os escritores clássicos foi que todo caminho tinha já preparada a derivada antes de o processo de diferenciação realmente começar. Marx queria um método que realmente seguisse o processo em si definida a derivada como $\frac{0}{0}$, caso em que poderia ser adotado um novo símbolo $\frac{dy}{dx}$. A derivada, ele afirmou, deveria ser derivada por um *processo* de diferenciação, não produzida desde o início pelo teorema binomial.

> Quer partamos falsamente de $x + dx$ ou corretamente de $x + h$, se substituirmos este binômio indeterminado na função algébrica dada de x, nós o transformamos em um binômio de grau definido, por exemplo, $(x+h)^3$ em vez de x^3, e isso em um binômio em que em um caso dx, no outro caso h, figura como seus últimos membros. Por isso, também figura na expansão apenas como um fator, com o qual as funções, derivadas do binômio, são externamente afetadas[23].

Essa falta de desenvolvimento interno pode ser evitada no método que Marx sugere, digamos para $y = x^3$:

$$y = f(x) = x^3$$

$$f(x_1) - f(x) = y_1 - y = x_1^3 - x^3 = (x_1 - x)(x_1^2 + xx_1 + x^2)$$

$$\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = x_1^2 + xx_1 + x^2.$$

[191]Quando $x = x_1$, ou $x - x_1 = 0$, obtemos:

$$\frac{0}{0} = \frac{dy}{dx} = x^2 + xx + x^2 = 3x^2.$$

---

[22] Sabemos agora que, muitas vezes, isso não pode ser feito, mas isso requer uma extensão da concepção funcional para além do horizonte de Lagrange.

[23] "nur als Faktor, womit die durch das Binom abgeleiteten Funktionen äusserlich behaftet sid".

Neste método, escreve Marx, obtemos primeiro uma *derivada preliminar*, ou seja, $x_1^2 + xx_1 + x^2$, e isto passa por $x = x_1$ para a derivada definida. Esta passagem de x_1 para x elimina qualquer aproximação "infinitesimal", mostra que a derivada é na verdade $\frac{0}{0}$, obtida quando $x_1 - x$ é realmente zero:

Aqui vemos de forma notável:

> *Primeiramente*: para obter a derivada devemos colocar $x_1 = x$, portanto $x_1 - x = 0$ no *sentido matemático estrito*, sem histórias de uma mera aproximação infinitesimal.
> *Segundo*: Pelo fato de que x_1 foi colocado $= x$, portanto $x_1 - x = 0$, nada simbólico entra na "derivada". A grandeza x_1, originalmente introduzida variando x, não desaparece, só é *reduzida* ao seu limite mínimo x. Essa grandeza permanece como um elemento introduzido como novo na função original, que por sua combinação em parte consigo mesmo, em parte com o x da função original, produz no final a "derivada", que é a "derivada" preliminar reduzida ao seu valor mínimo.
> …A desgraça transcendental ou simbólica ($\frac{0}{0} = \frac{dy}{dx} = 3x^2$) verifica-se apenas no lado esquerdo, mas já não causa susto, pois aparece agora apenas como a *expressão de um processo* que já comprovou seu conteúdo verdadeiro no lado direito da equação.[24]
> No momento em que $x_1 = x$, o quociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ se torna $\frac{0}{0}$. Por na expressão $\frac{0}{0}$ ter desaparecido todo e qualquer traço de sua origem e de seu significado, ela é substituída pelo símbolo $\frac{dy}{dx}$, no qual as diferenças finitas Δy e Δx aparecem simbolizadas como diferenças abolidas [*liquidated*] (*aufgehobene*) ou desaparecidas (*verschwundene*). Neste momento, a álgebra desaparece e o cálculo diferencial, que opera com os símbolos $\frac{dy}{dx}$, começa.

Para entender melhor as intenções de Marx, traduzimos aqui parte da carta que Engels escreveu para ele em 18 de Agosto de 1881, depois de ler o manuscrito de Marx:

> Quando dizemos que em $y = f(x)$ o x e y são variáveis, então, enquanto não seguirmos adiante, isso é uma contenção sem todas as conseqüências, e x e y ainda são, pro tempore, constantes de fato. Apenas quando eles realmente mudam, *dentro da função*, eles se tornam variáveis de fato. Só nesse caso é possível para a relação – não de ambas as grandezas como tal, mas de sua variabilidade – que ainda está escondida na equação original, revelar-se. [192]A primeira derivada $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ mostra essa relação como ocorre no curso da verdadeira mudança, ou seja, em cada mudança *dada*; a derivada definitiva $\frac{dy}{dx}$ mostra-a em sua generalidade, pura. Portanto, podemos vir de $\frac{dy}{dx}$ para cada $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, enquanto este ($\frac{\Delta y}{\Delta x}$) cobre apenas o caso especial. No entanto, para passar do caso especial para a relação geral, o caso especial deve ser suprassumido [*liquidated*] como tal (*als solcher aufgehoben werden*). Assim, depois de a função ter passado pelo processo de x para x' com todas as suas consequências, pode-se tranquilamente deixar regressar x' para x novamente; x já não é mais a antiga variável do mesmo nome, ela sofreu *verdadeira mudança*, e o resultado da mudança permanece, mesmo se a suprassumirmos [*liquidate*] novamente (*auch wir sie selbst wieder aufheben*).

[24] "Das transzendentale oder symbolische Unglück ereignet sich nur auf der linken Seite, hat aber seine Schrecken bereits verloren, da es nun als Ausdruck eines Prozesses erscheint, der seinen wirklichen Gehalt bereits auf der rechten Seite der Gleichung bewährt hat".

> Vemos aqui, finalmente, de forma clara, o que muitos matemáticos afirmam há muito tempo, sem poder apresentar razões racionais para isso, que a derivada é o original, os diferenciais dx e dy são derivados.

A diferença entre o método de Marx e o método de D'Alembert (e também o de Cauchy) não deve ser mal entendida e rejeitada como trivial ou insignificante ($x' - x = h$ versus $x' = x + h$). Marx, a meu ver, estava perfeitamente satisfeito com o fato de que o método de D'Alembert está formalmente correto. No entanto, ele queria chegar a uma compreensão do processo de diferenciação em si. A derivada é obtida deixando x (e y) passar por uma sequência de valores constantes, ou é necessário deixar x (e y) realmente mudar? Assim entendido, vemos o velho "paradoxo" de Zeno emergindo: o movimento de um ponto pode ser obtido seguindo uma sequência de posições desse ponto em repouso? Zeno mostrou que uma sequência de tais posições nunca produzirá movimento; ele também mostrou por um raciocínio semelhante que Aquiles nunca alcançará a tartaruga. O método de D'Alembert, afirma Marx, representa um modo de pensamento que não faz justiça ao evento real que acontece quando uma função é diferenciada. O que acontece é uma verdadeira mudança, e isso é melhor compreendido quando escrevemos primeiro $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ como uma função de x e x' inteiramente novo, e então deixamos $x = x'$. Além disso, $h = x' - x$ não apenas *se aproxima* de zero, h *torna-se* zero. A ênfase é colocada no fato de que a derivada aparece apenas quando Δy e Δx são absolutamente zero. Isso nunca ficou claro com os "místicos" Leibniz-Newton, e apareceu como algo acidental em D'Alembert-Lagrange[25]. É tão pouco compreendido que, em alguns textos populares, como *Mathematics for the Million*, de Hogben, dá-se a impressão de que o processo de diferenciação é apenas aproximadamente verdadeiro. Mas mesmo em nossos livros modernos, embora por trás do aparato não esteja totalmente esclarecido.

Tomemos como exemplo os livros didáticos *Pure Mathematics*, de G. H. Hardy, que é um dos nossos maiores matemáticos vivos. A derivada é explicada no modo Cauchy-D'Alambert:

$$\phi'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\phi(x+h) - \phi(x)}{h},$$

[193] o que significa que $\frac{\phi(x+h)-\phi(x)}{h}$ tende a um limite quando h tende a zero. O que isto significa? É-nos dito que $\phi(y)$ tende ao limite l enquanto y tende a zero, se, quando algum número positivo δ, por menor que seja, for atribuído, podemos escolher $y_0(\delta)$ de modo que $|\phi(y) - l| < \delta$ quando $0 < y \leqq y_0(\delta)$.[26]

Essa definição é precisa, no sentido de que temos um critério correto e sutil para testar qualquer limite. Mas $\phi(y)$ sempre paira próximo ao limite, uma vez que nos é dito que y "tende" a zero. Similarmente, $\phi'(x)$ é definido por meio de um h que "tende" a zero. A questão é: o evento $h = 0$ é alguma vez alcançado? Marx não apenas afirma isso, ele enfatiza isso. A definição usual dos livros didáticos modernos não leva essa questão a sério, porque está satisfeita com um critério pragmático que nos permite reconhecer um limite quando ele aparece[27].

---

[25] Mais informações em F. Cajori, "The History of Zeno's Arguments on Motion", vi, *Am. Math. Monthly* XXII (1915), p. 143-149.

[26] G. H. Hardy, *Pure Mathematics* (Cambridge University Press, 6th ed., 1933) esp. p. 116, 198. Esta definição de limite é válida quando y tende a zero por valor positivo. De maneira similar, uma definição de limite pode ser alcançada quando y tende a zero por valores negativos.

[27] See e.g. F. Cajori, *Am. Math. Monthly*, XXII (1915), p. 149, sobre as variáveis atingirem seus limites: "Na teoria moderna, não é particularmente uma questão de argumentação, mas sim de suposição. A variável atinge seu limite se quisermos que ela atinja; não atinge seu limite, se quisermos que não o

O resultado é que o ensinamento dos elementos do cálculo muitas vezes procede da seguinte forma - e reconheço em meu próprio ensino. Primeiro, mostra-se que um limite pode ser abordado da forma mais próxima possível, mas nunca atingida. Então a derivada é definida com o auxílio dessa concepção de limite. E então, de repente, começamos a trabalhar com essa derivada, que nunca poderia ser alcançada (como demonstramos anteriormente) como se realmente tivesse sido alcançada. O caso $h = 0,\ x' = x,$ embora presente no aparato formal, é de alguma forma obscurecido no raciocínio. Uma exceção é encontrada no trabalho de Moritz Pasch, que em sua análise muito cuidadosa da derivada desenvolve um aparato formal no qual há espaço completo para o caso $h = 0$. [28]

Marx, portanto, pertencia àquela escola de pensadores que insistem na máxima clareza de pensamento ao interpretar um aparato formal. Sua posição contrasta nitidamente com a dos matemáticos ou físicos matemáticos que acreditam que o aparato formal é a única coisa que importa. A posição de Marx era a do materialista, que insiste que a matemática significativa deve refletir as operações no mundo real.

É interessante notar que as diferenças entre o aparato formal de Marx e D'Alambert diminuem quando consideramos funções mais complicadas. Para o caso $y = \sin x$ a derivada, no modo de diferenciação de D'Alambert, ainda é obtida por separação (*Loswicklung*), mas em $y = \log x$ a derivada só pode ser obtida a partir de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ deixando h passar por uma verdadeira mudança.

[194]Uma vez que $\frac{dy}{dx}$ é estabelecido como o resultado de uma mudança real, ele se torna o sujeito de um novo cálculo, o cálculo diferencial. Marx, em um manuscrito sobre o significado do diferencial, derivou uma das primeiras fórmulas desse cálculo, que a derivada de $y = uz,$ sendo u e z funções da variável $x,$ é dada por

$$\frac{dy}{dx} = z\frac{du}{dx} + u\frac{dz}{dx}.$$

Quando $uz = f(x)$, então $\frac{dy}{dx}$ pode ser escrito como $f'(x)$, e "a $f'(x)$ opõe-se a $\frac{dy}{dx}$ como sua própria expressão simbólica, como sua sósia ou equivalente simbólico".

> O coeficiente diferencial simbólico tornou-se um *ponto de partida independente*, cujo equivalente real deve primeiro ser encontrado. A iniciativa foi movida do lado direito, o algébrico (em $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = \mathrm{f}'(\mathrm{x})$), para o esquerdo, o simbólico. Com isso, no entanto, o cálculo diferencial aparece também como uma maneira particular de calcular, operando já de forma independente em seu próprio território. Seus pontos de partida $\frac{du}{dx}, \frac{dz}{dx}$ são grandezas matemáticas que pertencem exclusivamente a este cálculo e o caracterizam. E esta inversão (*Umschlag*) do método resultou aqui da diferenciação algébrica de uz. O método algébrico muda automaticamente para o seu oposto, o método diferencial.

Agora, removendo na equação (a), $\frac{dy}{dx} = z\frac{du}{dx} + u\frac{dz}{dx}$ o denominador comum dx, obtemos (b), $d(uz) = dy = udz + zdu$, em que cada traço de sua origem de (a) foi removido.

faça". Tal raciocínio parece levar à conclusão de que depende de nossa vontade se Aquiles alcançará ou não a tartaruga.

[28] M. Pasch, "Der Begriff des Differentials", em *Mathematik am Usprung* (Leipzig, 1927), p. 46-74, eps. 61, 68.

Portanto, (b) é válido no caso de u e z dependentes de x, assim como no caso em que eles só dependem um do outro sem qualquer relação com x. Desde o início é uma equação simbólica e pode servir desde o início como uma equação operacional simbólica.

O diferencial é, portanto, uma forma simbólica – diríamos uma forma operacional – $dy = f'(x)\,dx$ aparece apenas como outra forma de $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ e é sempre conversível na forma diferencial. Os matemáticos modernos não terão erro em encontrar esse método, e V. Glivenko demonstrou especialmente[29] como Hadamard, o matemático francês, havia enfatizado o papel operativo do diferencial. Marx não menciona, contudo, a interpretação agora usual de que dy deveria ser $f'(x)\Delta x$, obtido arbitrariamente colocando $dx = \Delta x$. Esse modo de representar dy, que remonta a Cauchy, pode ter escapado de Marx (ele critica Boucharlat por sua introdução do diferencial, mas o método de Boucharlat é antiquado). Acreditamos, no entanto, que Marx teria, de qualquer modo, objetado a essa equação $dx = \Delta x$, que estabeleceu uma identidade entre duas concepções com um significado operacional inteiramente diferente. A interpretação de Cauchy sobre dy, que [195]encontrou seu caminho em todos os nossos livros, é mecânica e só pode ser justificada pelo uso no qual a fórmula $dy = f'(x)\,dx$ pode ser colocada como uma aproximação para certas mudanças de uma constante x em outra igualmente constante $x + \Delta x$.[30] E o fato de que essa diferença entre dx e Δx, dy e Δy pode ser representada nitidamente em uma figura não teria impressionado Marx e Engels, cujo interesse estava na relação aritmético-algébrica dos símbolos do cálculo com o processo de mudança real. Isso pode ser mostrado na seguinte correspondência entre Marx e Engels depois que Sam Moore escreveu sua opinião sobre o material manuscrito de Marx:

> Anexo primeiro uma tentativa matemática de Moore. O resultado de que "o método algébrico é apenas o método diferencial disfarçado" refere-se, obviamente, apenas ao seu próprio método de construção geométrica e também está relativamente correto. Eu escrevi para ele que você não se importa com a maneira como a matéria é representada na construção geométrica, a aplicação à equação das curvas é de fato suficiente (*reiche ja hin*). Além disso, a diferença fundamental entre seu método e o método antigo é que você deixa mover x para x', portanto deixa-o realmente variar, enquanto o outro parte de $x + h$, o que sempre representa apenas a soma de duas grandezas, mas nunca a variação de uma grandeza. Seu x, portanto, mesmo quando passou para x' e retornou para x, é outro que não o anterior; enquanto x permanece constante durante todo o período em que h é primeiro adicionado a x e subsequentemente subtraído. No entanto, toda representação gráfica da variação é necessariamente a representação do processo *passado*, do *resultado*, portanto, de uma grandeza que se tornou constante, a linha x; seu complemento é representado como $x + h$, dois segmentos de uma linha. A partir disso, já se segue que uma representação gráfica de como x se torna x' e x' novamente se torna x é impossível (Engels para Marx, 21 de Novembro de 1882).[31]

A resposta de Marx no dia seguinte:

---

[29] V. Glivenko, "Der Differentialbegriff bei Marx und Hadamard", *Unter dem Banner des Marxismus* (1935) no. 9, p. 102-110; *Russian text in Pod Znamenem Marksizma* 1934, no. 5. Veja-se J. Hadamard, *Cours d'analyse*, I (Paris, 1927), p.2 e 6.

[30] Compare C. De la Vallee Poussin, *Cours d'analyse infinitésimale*, I (Louvain, Paris, 1923), p. 52: "Para a substituição de dx por Δx na equação $df(x) = f'(x)\Delta x$ não há necessidade, mas é consagrado pelo costume e este costume é justificado".

[31] As palavras entre aspas estão em inglês na carta – veja-se *Marx-Engels Gesemtausgabe*, Abt. III, Bd. II, p. 571.

> Sam, como você viu imediatamente, critica o método analítico que usei simplesmente punindo-o colocando de lado, e em vez disso se ocupa com a aplicação geométrica, à qual não dediquei uma palavra.
> Eu poderia, da mesma forma, livrar-me do (*konnte damit abspeisen*) desenvolvimento do chamado método diferencial – começando com o método místico de Newton e Leibniz, continuando com o método racional de D'Alambert e Euler, e terminando com o método puramente algébrico de Lagrange (que no entanto sempre parte do mesmo princípio original de Newton-Leibniz) – eu poderia me livrar de todo esse desenvolvimento histórico da análise dizendo que *praticamente* nada essencial mudou na [196]aplicação geométrica do cálculo diferencial, isto é, na representação geométrica (*Versinnlichung*). [32]

Esta última observação de Marx mostra afinidade com a de Dedekind, que também se esforçou para desenvolver o cálculo independente da representação geométrica da derivada. Podemos considerar isso como uma das características da análise de Marx, que está de acordo com nossa abordagem moderna. Outra característica importante foi sua insistência no papel operativo do diferencial e em sua busca pelo momento exato em que o cálculo surge da álgebra subjacente como uma nova doutrina. "Infinitesimais" não aparecem no trabalho de Marx. Em sua insistência na origem da derivada em uma verdadeira mudança da variável, ele dá um passo decisivo para superar o antigo paradoxo de Zeno – ao enfatizar a tarefa do cientista em não negar as contradições no mundo real, mas estabelecer o melhor modo em que elas podem existir lado a lado[32]. Aqui, sua posição é diretamente oposta àquela tomada por Du Bois Reymond, que achava que os acréscimos dx, dy deviam ser considerados em repouso, invariáveis[33], ou do matemático moderno Tarski, que nega inteiramente a existência de quantidades variáveis[34]. A posição de Marx a esse respeito será apreciada pela maioria dos matemáticos.

Acreditamos que este levantamento das opiniões de Marx sobre a origem do cálculo demonstra que a publicação de seus outros manuscritos matemáticos também é desejável.

Massachusetts Institute of Technology.

---

[32] *Marx-Engels Gesamtausgabe*, Abt. III, Bd. IV, p. 572. Compare *Marx*, *Capital*, part. I, ch. 3, Sec. 2: “The Metamorphosis of Commodities” (Tradução em inglês, ed. 1889, p. 76).

[33] Du Bois Reymond, *op. cit.*, p. 141, declara sua antipatia pela concepção de dx como um “quantité-evanouissante”, já que ele desaprova (*geht mir entschieden wider den Mann*) grandezas que começam a se mover apenas quando olhamos para as fórmulas: “Enquanto o livro está fechado, prevalece um profundo sossego. Assim que eu o abro, começa a corrida para zerar todas as grandezas fornecidas com o d”. Marx, sem chegar à conclusão de Du Bois Reymond, poderia ter compartilhado de suas críticas, já que ele queria expressar não apenas uma mudança no papel, mas uma mudança na realidade.

[34] A Tarski, *Introduction to Logic* (Nova Iorque, 1941), p. 4.